Aufgabe 1 *(konvexe Funktionale)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet mit C^1-Rand, $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ konvex und $g \in C^0(\overline{\Omega})$. Betrachten Sie auf $\mathcal{C} = \{u \in C^1(\overline{\Omega}) : u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$ das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega (\phi(Du) + gu).$$

Zeigen Sie: u ist genau dann Minimierer von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{C}$, wenn gilt:

$$-\mathrm{div}\,[(D_p\phi)(Du)] = g.$$

Aufgabe 2 (*Konvergenzsatz von Lebesgue*)
Sei μ ein Mass auf X, und $f_k, f : X \to \mathbb{R}$ seien μ-messbar. Es gelte:

(1) $f_k \to f$ punktweise μ-fastüberall.

(2) Für alle k ist $|f_k| \leq g_k^p$ μ-fast-überall, für Funktionen $g_k : X \to [0, \infty)$ mit $g_k \to g$ in $L^p(\mu)$.

Dann folgt $f_k \to f$ in $L^1(\mu)$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 23. Januar vor der Vorlesung.